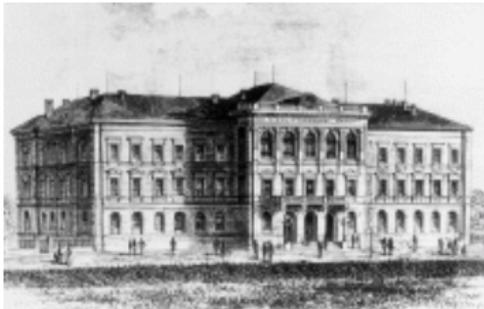


Kürzere reguläre Ausdrücke aus deterministischen endlichen Automaten

by

Hermann Gruber



Institut für Informatik,
Justus-Liebig-Universität Giessen,
Arndtstrasse 2,
D-35392 Giessen.

Februar 2009

gemeinsam mit [Markus Holzer](#) (JLU Giessen).

Überblick

Einleitung

- Einleitung und Motivation
- Neue Ergebnisse für Reg. Ausdrücke

Zustandselimination

- Das grundlegende Schema
- Fortlaufendes Beispiel
- Eliminationsreihenfolge

Gute Reihenfolgen für die Zustandselimination

- Die grundlegende Idee
- Unabhängige Mengen
- Teilgraphen mit kleiner Baumweite
- Anwendung: Operationen auf Regulären Ausdrücken

Diskussion

Einleitung

Motivation.

- ▶ Reguläre Sprachen werden beschrieben durch
 - ▶ Deterministische endliche Automaten (DEA)
 - ▶ Nichtdeterministische endliche Automaten (NEA)
 - ▶ Reguläre Ausdrücke (RA)

Beschreibungskomplexität. Seien $X, Y \in \{\text{DEA}, \text{NEA}, \text{RA}\}$

- ▶ Umwandlungsprobleme: X nach Y
- ▶ Operationsprobleme: z.B. $X \circ X$ nach Y , gegeben Sprachoperation \circ

Bekannte Ergebnisse.

- ▶ Einige Probleme sind sehr gut verstanden, z.B. NEA nach DEA
- ▶ Einige andere weniger gut, insbesondere mit RAen

Hier. Umwandlung endlicher Automaten in reg. Ausdrücke (RAe).

Neuere Entwicklungen

Ausgangspunkt. Erste Abschätzungen für die Grösse von RAs für das Komplement einer Sprache u.ä. Jede Menge offener Probleme ... [Ellul et al. 02]

Letztes Jahr. Überwiegend schlechte Nachrichten:

- ▶ Schnitt, Shuffle von RAs ist exponentiell [Gelade & Neven 08; Gruber & Holzer 08]
- ▶ Komplement doppelt exponentiell [Gelade & Neven 08; Gruber & Holzer 08]
- ▶ DFA nach RA ist exponentiell [Gelade & Neven 08; Gruber & Holzer 08], bereits für binäres Alphabet
- ▶ Quotienten und Rotation sind polynomiell [Gruber & Holzer 08]

Bessere obere Schranken?

Ausgangspunkt. Umwandlungsalgorithmen EA nach RA

- ▶ McNaughton-Yamada-Algorithmus
- ▶ Zustandselimination
- ▶ Lösen eines “linearen Gleichungssystems”
- ▶ ...

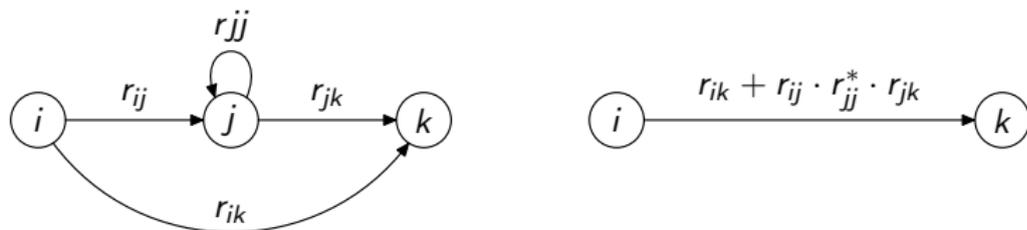
Kommentare.

- ▶ Algorithmen sind alle ungefähr dieselben [Sakarovitch 05]
- ▶ Anordnung der Zustände bei Elimination beeinflusst Grösse von RA [McNaughton & Yamada 60]
- ▶ Schlechtester Fall: Kleinstes äquivalentes RA hat Grösse c^n mit $c \geq 1.001$ [Gruber & Holzer 08]

Zustandselimination

Schema.

- ▶ Initialisierung: Neuen Start- und Endzustand einführen (und geeignet verbinden).
- ▶ Schritt: Eliminiere nächsten Zustand j (ausser Start-/Endzustand):



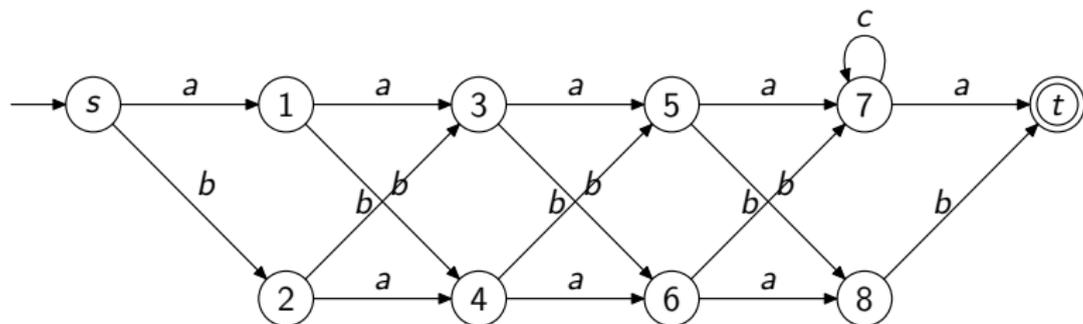
Manchmal sofort Vereinfachungen der entstehenden Ausdrücke möglich.

Theorem

Sei A ein EA mit n Zuständen. Dann liefert Zustandselimination einen äquivalenten RA der Grösse höchstens $|\Sigma| \cdot 4^n$, unabhängig von der Eliminationsreihenfolge. □

Fortlaufendes Beispiel

Beispiel. Man betrachte den folgenden EA:

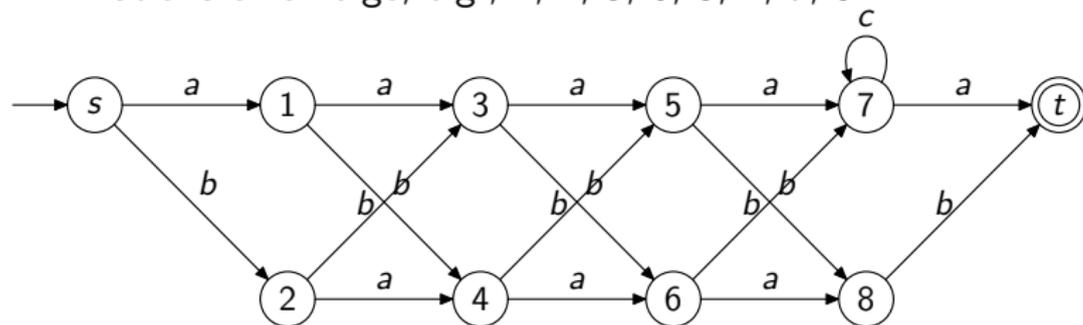


Berechnung am Beispiel.

Eliminationsreihenfolge, e.g., 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8

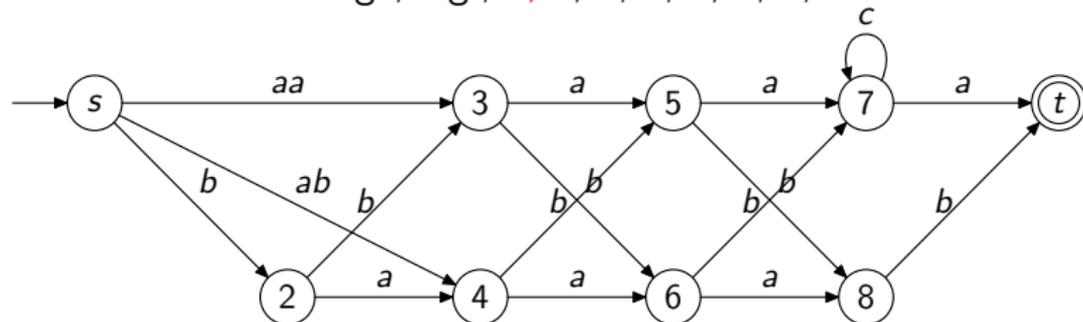
Berechnung am Beispiel.

Eliminationsreihenfolge, e.g., 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8



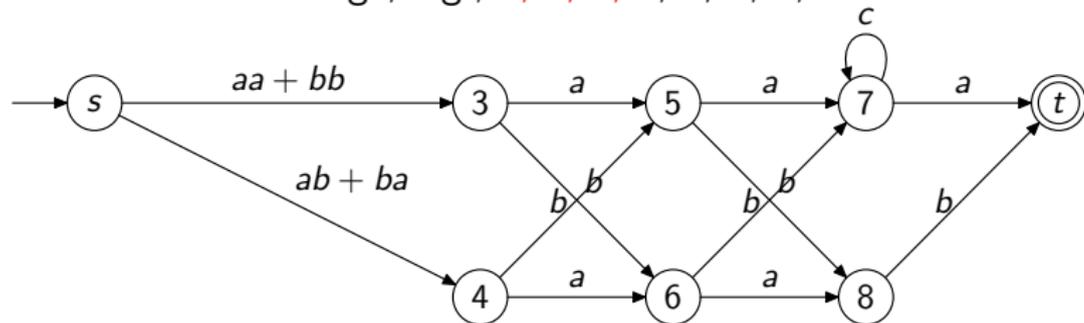
Berechnung am Beispiel.

Eliminationsreihenfolge, e.g., 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8



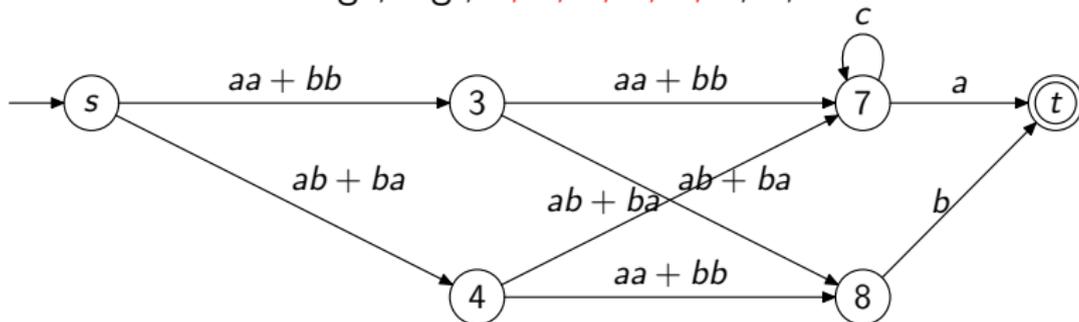
Berechnung am Beispiel.

Eliminationsreihenfolge, e.g., 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8



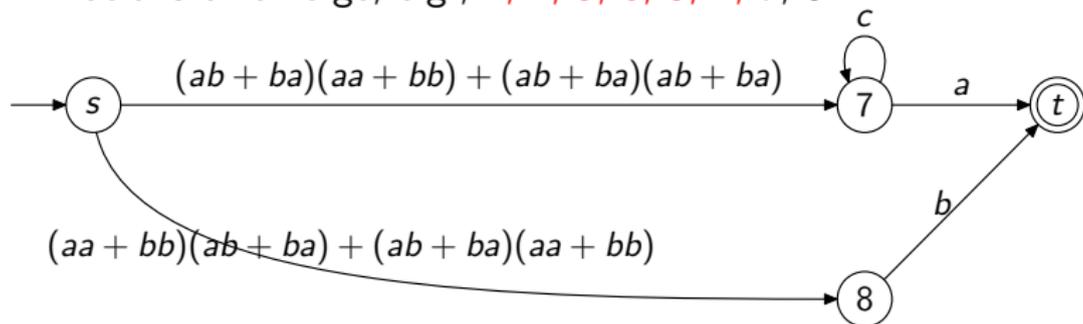
Berechnung am Beispiel.

Eliminationsreihenfolge, e.g., 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8



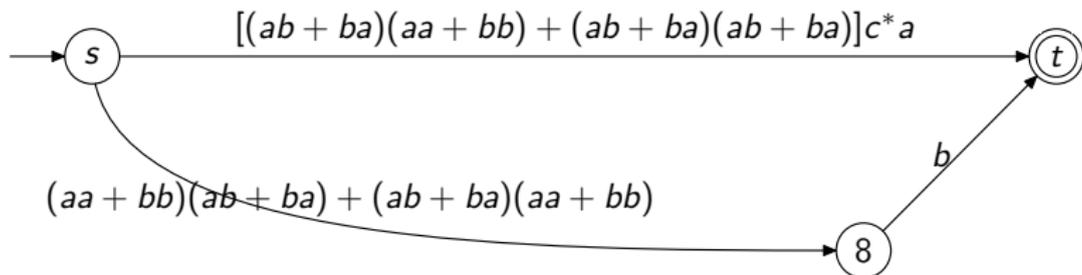
Berechnung am Beispiel.

Eliminationsreihenfolge, e.g., 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8



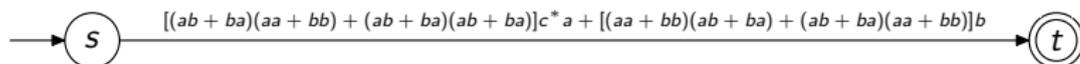
Berechnung am Beispiel.

Eliminationsreihenfolge, e.g., 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8



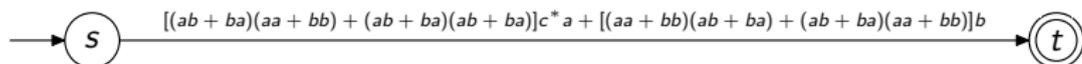
Berechnung am Beispiel.

Eliminationsreihenfolge, e.g., 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8



Berechnung am Beispiel.

Eliminationsreihenfolge, e.g., 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8



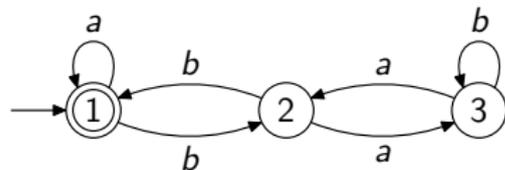
Resultat. $[(ab + ba)(aa + bb) + (ab + ba)(ab + ba)]c^*a + [(aa + bb)(ab + ba) + (ab + ba)(aa + bb)]b$

Auf die Reihenfolge kommt es an

Grundlegendes Problem.

[McIntosh 68]

“... a basic fault of the method is that it generates such cumbersome and so numerous expressions initially.” ...



Eliminationsreihenfolge.

- ▶ 3, 2, 1 (hier gut)
- ▶ 1, 2, 3 (hier nicht so gut)

Auf die Reihenfolge kommt es an (2)

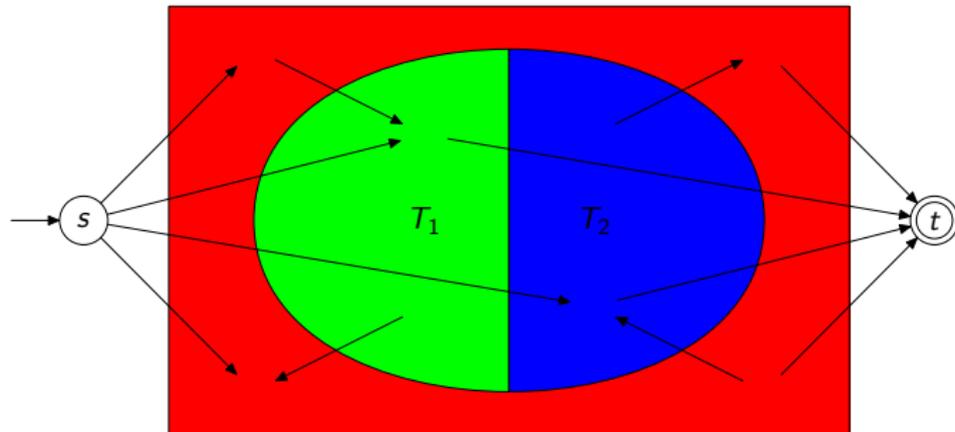
Frühere (experimentelle) Ansätze.

- ▶ Einfache Strategie:
 - ▶ Nach dem Knotengrad sortieren (hoher Grad zuletzt) [McNaughton & Yamada 60]
- ▶ Iterative Strategien
 - ▶ Ausgeklügeltere Gewichtsfunktion (Eingangs-, Ausgangsgrad, Grösse der Zwischenergebnisse) [Delgado & Morais 04]
 - ▶ Seriell-parallele Strukturen in azyklischen Automaten [Morais, Moreira & Reis 05, Gulan & Fernau 08]
- ▶ Divide & Conquer
 - ▶ **Brückenknoten** ganz nach hinten bringen [Han & Wood 07]
 - ▶ Separatoren in planaren Automaten [Ellul et al. 05]

Intuition der grundlegenden Idee

Intuition. Keine Interferenz bei Elimination wechselseitig abgeschnittener Teilstrukturen.

Schematische Zeichnung. Iterativer Ansatz

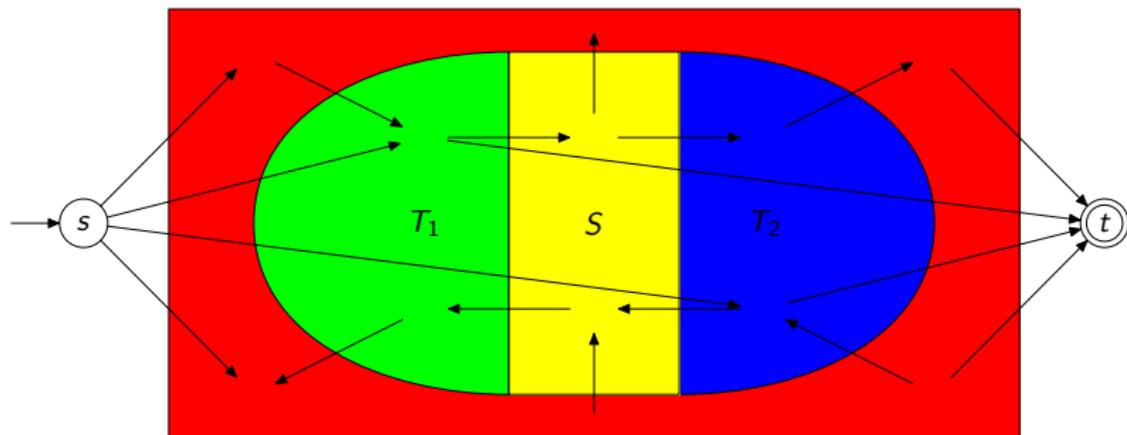


Eliminationsreihenfolge. Erst die **grünen**, und **blauen**, dann die **roten** Zustände.

Intuition der grundlegenden Idee

Intuition. Keine Interferenz bei Elimination wechselseitig abgeschnittener Teilstrukturen.

Schematische Zeichnung. Rekursiver Ansatz



Eliminationsreihenfolge. Erst die **grünen**, und **blauen**, dann die **gelben**, und schliesslich die **roten** Zustände.

Und jetzt: Die formale Intuition

Lemma

Sei A ein EA mit Zuständen Q . Nimm an, man $S \subseteq Q$ in zwei Mengen T_1 und T_2 einteilen, so dass der induzierte Teilgraph in zwei wechselseitig isolierte Komponenten $H[T_1]$ und $H[T_2]$ zerfällt. Seien j, k Zustände ausserhalb von $T_1 \cup T_2$. Dann gilt

$$r_{jk}^{T_1 \cdot T_2} \cong r_{jk}^{T_1} + r_{jk}^{T_2},$$

d.h., der RA den man durch Elimination der Knoten in T_1 gefolgt von derer in T_2 bekommt ist (modulo \cong) die Summe der beiden Ausdrücke, die man bekommt wenn man T_1 bzw. T_2 eliminiert.

Remark. \cong abstrahiert von einfachen Umformungen zwischen RAen, etwa $\emptyset \cdot a = \emptyset$ [Brzozowski 64]

Von EAen zu Regulären Ausdrücken

Wie benutzen wir die formale Intuition?

- ▶ Suche nach **grossem** Teil des Graphen der “einfach” ist, d.h., durch Wegbeamten dieses Teils entstehen nicht allzu grosse Ausdrücke.
- ▶ Wiederhole diese Idee beim resultierenden Automaten.
(Irgendwann leider: grosser einfacher Teil = je ein einziger Zustand.)

Grosse Induzierte Teilgraphen. Wenn Graphen **dünn besetzt**, Existenz **riesiger** ...

- ▶ Unabhängiger Mengen [Turán 46]
- ▶ induzierter Teilgraphen of der Baumweite 2 [Edwards & Farr 08]

garantiert.

Beachte. Man kann mit einfachen Greedy-Algorithmen auch Derartige finden (riesige, nicht optimale).

Unabhängige Mengen

Turán's Theorem. Sei G ein symmetrischer Digraph mit Durchschnittsgrad \bar{d} und n Knoten. Dann hat G eine unabhängige Menge der Grösse $n/(\bar{d} + 1)$.

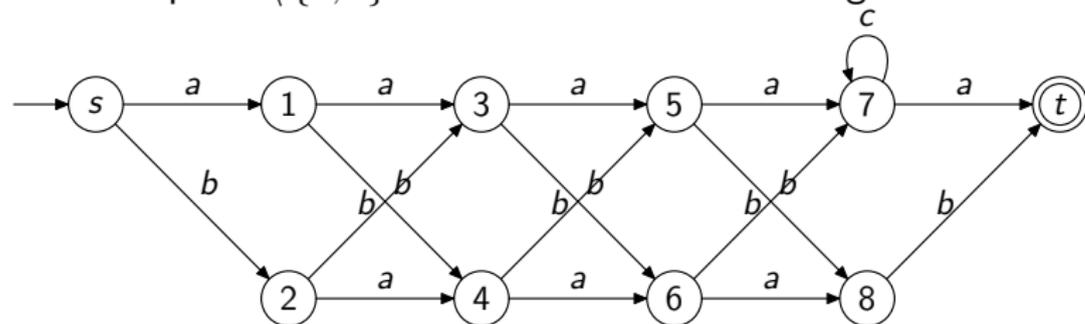
Theorem

▶ Skip example ...

Sei A ein DEA über binärem Alphabet mit n Zuständen. Dann gibt es eine Eliminationsreihenfolge, die einen RA liefert mit Länge höchstens $O(2.602^n)$.

Fortlaufendes Beispiel—Unabhängige Mengen

Hier: Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat 8 Zustände und 26 ungerichtete Kanten.

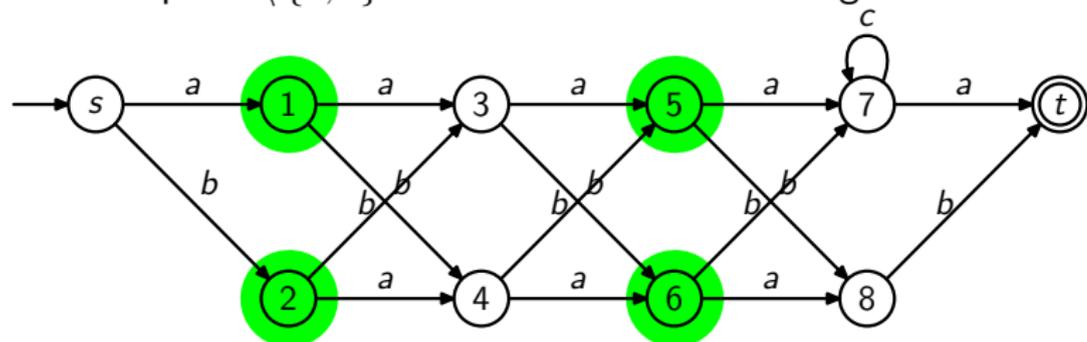


Also $\bar{d} \geq 3$. Mit Satz von Turán: unabhängige Menge der Grösse $8/(4+1) = 1.6$ —in grün dargestellt.

Reihenfolge.

Fortlaufendes Beispiel—Unabhängige Mengen

Hier: Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat 8 Zustände und 26 ungerichtete Kanten.

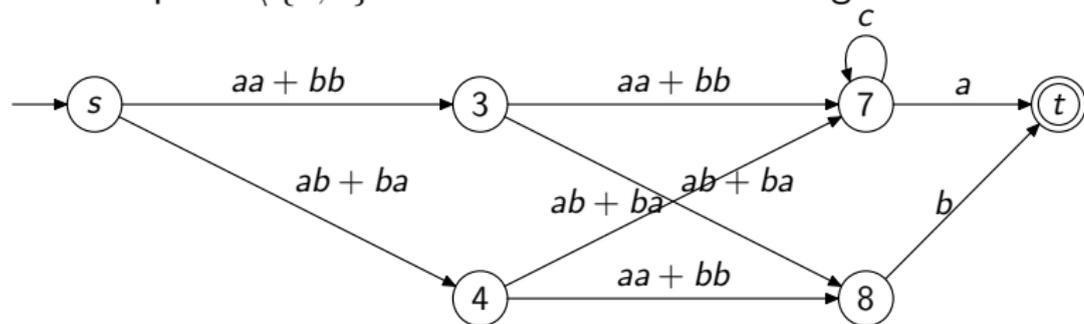


Also $\bar{d} \geq 3$. Mit Satz von Turán: unabhängige Menge der Grösse $8/(4+1) = 1.6$ —in grün dargestellt.

Reihenfolge. 1, 2, 5, 6

Fortlaufendes Beispiel—Unabhängige Mengen

Hier: Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat 8 Zustände und 26 ungerichtete Kanten.

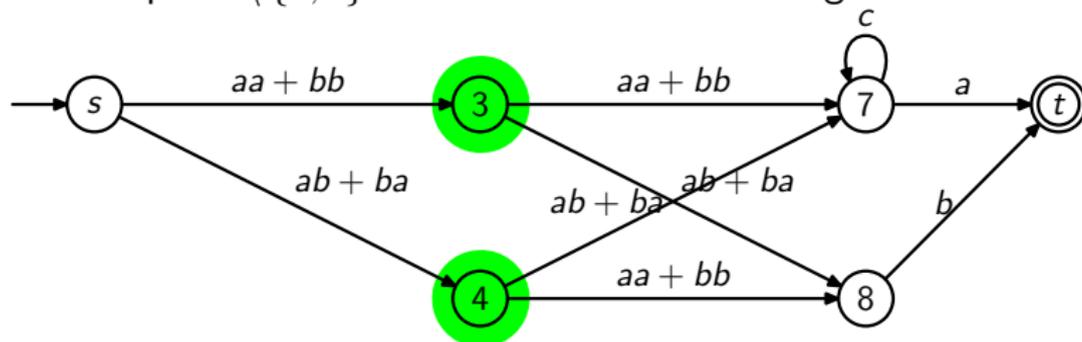


Also $\bar{d} \geq 3$. Mit Satz von Turán: unabhängige Menge der Grösse $8/(4 + 1) = 1.6$ —in grün dargestellt.

Reihenfolge. 1, 2, 5, 6

Fortlaufendes Beispiel—Unabhängige Mengen

Hier: Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat 8 Zustände und 26 ungerichtete Kanten.

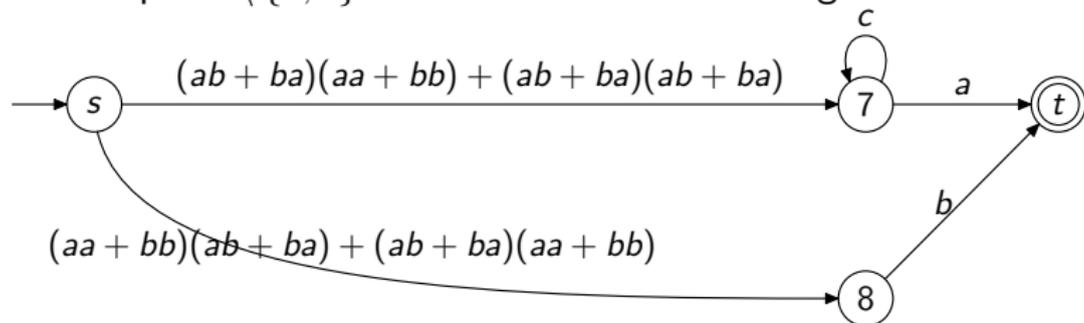


Also $\bar{d} \geq 3$. Mit Satz von Turán: unabhängige Menge der Grösse $8/(4 + 1) = 1.6$ —in grün dargestellt.

Reihenfolge. 1, 2, 5, 6, 3, 4

Fortlaufendes Beispiel—Unabhängige Mengen

Hier: Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat 8 Zustände und 26 ungerichtete Kanten.

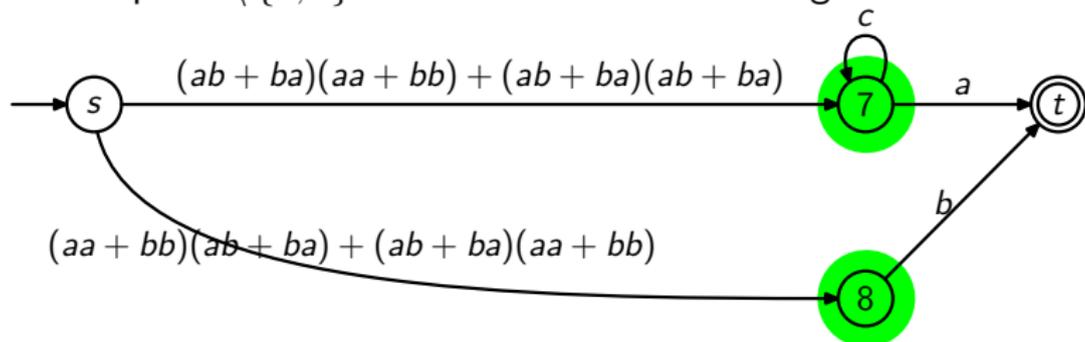


Also $\bar{d} \geq 3$. Mit Satz von Turán: unabhängige Menge der Grösse $8/(4 + 1) = 1.6$ —in grün dargestellt.

Reihenfolge. 1, 2, 5, 6, 3, 4

Fortlaufendes Beispiel—Unabhängige Mengen

Hier: Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat 8 Zustände und 26 ungerichtete Kanten.

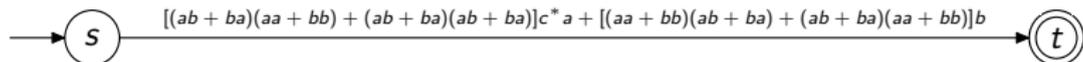


Also $\bar{d} \geq 3$. Mit Satz von Turán: unabhängige Menge der Grösse $8/(4 + 1) = 1.6$ —in grün dargestellt.

Reihenfolge. 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8

Fortlaufendes Beispiel—Unabhängige Mengen

Hier: Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat 8 Zustände und 26 ungerichtete Kanten.



Also $\bar{d} \geq 3$. Mit Satz von Turán: unabhängige Menge der Grösse $8/(4 + 1) = 1.6$ —in grün dargestellt.

Reihenfolge. 1, 2, 5, 6, 3, 4, 7, 8

Ergebnis. $[(ab + ba)(aa + bb) + (ab + ba)(ab + ba)]c^*a + [(aa + bb)(ab + ba) + (ab + ba)(aa + bb)]b$

Automaten mit kleiner Baumweite

Balancierte Separatoren of $G = (V, E)$. Eine Teilmenge von Knoten X ist ein balancierter k -Wege Separator für $S \subset V$ falls der durch $S \setminus X$ induzierte Teilgraph in k wechselseitig isolierte Teilgraphen $G[T_i]$ zerfällt, mit $1 \leq i \leq k$, so dass jeder höchstens noch halb so gross ist, d.h. $0 \leq |T_i| \leq \frac{1}{2}|S \setminus X|$.

Lemma. Sei $G = (V, E)$ Digraph mit (ungericht.) Baumweite $\leq k$. Dann hat jede Teilmenge S von V einen balancierten 3-Wege Separator mit höchstens $k + 1$ Knoten.

Theorem

Sei A ein NEA mit n Zuständen und (unger.) Baumweite $\leq k$. Dann gibt es eine Eliminationsreihenfolge, die einen RA liefert mit Länge höchstens $|\Sigma| \cdot n^{O(k)}$. □

Der Allgemeine Fall

Satz von Edwards und Farr, DM **308** (2008). Sei G ein zusammenhängender Graph mit Durchschnittsgrad höchstens $\bar{d} \geq 2$. Dann hat G einen induzierten Teilgraph mit (unger.) Baumweite höchstens 2 und mindestens $\frac{3n}{d+1}$ Knoten.

Theorem

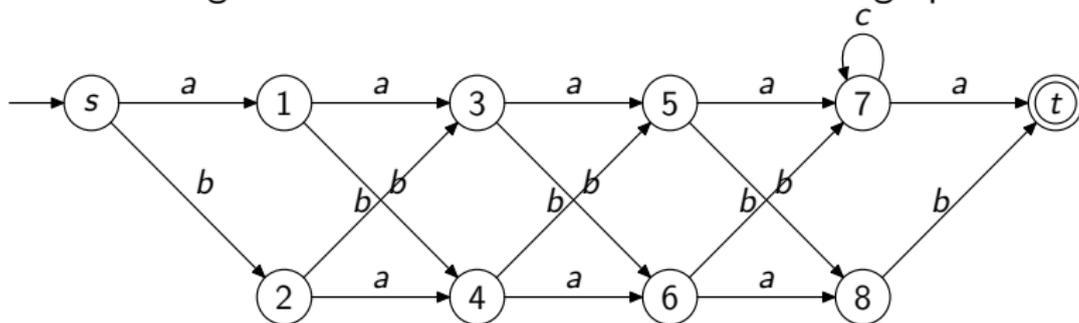
▶ Skip example ...

Sei A ein DEA über binärem Alphabet mit n Zuständen. Dann gibt es eine Eliminationsreihenfolge, die einen RA liefert mit Länge höchstens $O(1.742^n)$. □

Fortlaufendes Beispiel—Separatoren

Hier. Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat Baumweite mind. 3

Wegen Edwards und Farr: Induzierter Teilgraph

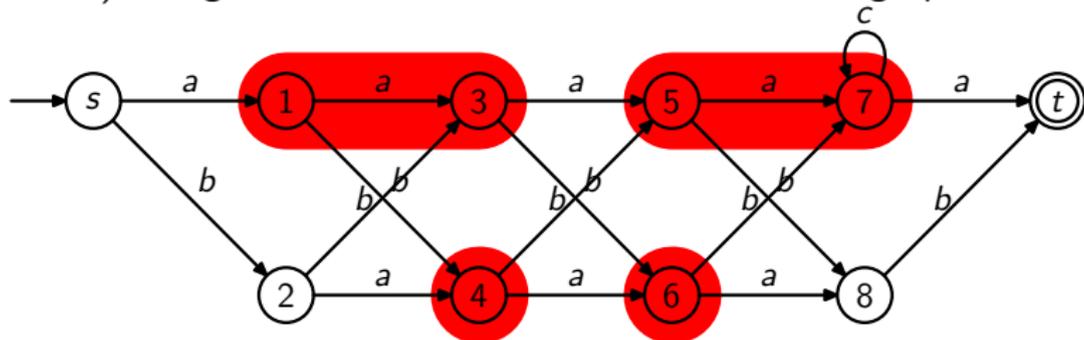


der Baumweite ≤ 2 mit mindestens $(3 \cdot 8)(4 + 1) = 4.8$
Knoten—Teilgraph in grün, Separator in gelb dargestellt.

Reihenfolge.

Fortlaufendes Beispiel—Separatoren

Hier. Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat Baumweite mind. 3 (kontrahiere rote Kanten). Wegen Edwards und Farr: Induzierter Teilgraph



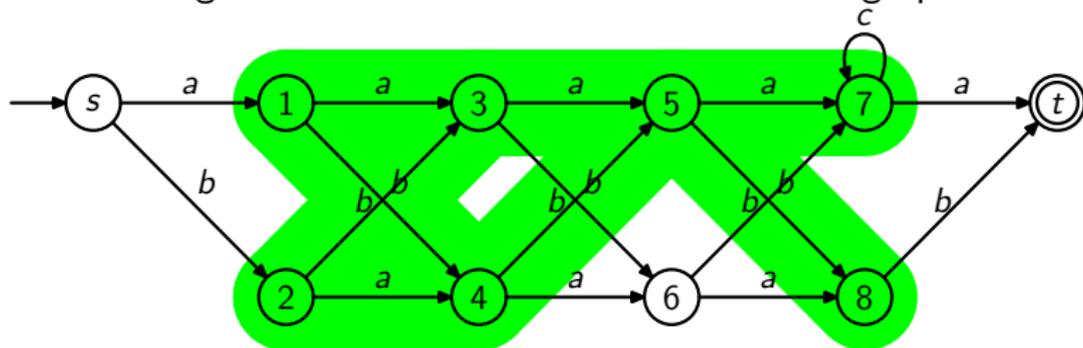
der Baumweite ≤ 2 mit mindestens $(3 \cdot 8)(4 + 1) = 4.8$
Knoten—Teilgraph in grün, Separator in gelb dargestellt.

Reihenfolge.

Fortlaufendes Beispiel—Separatoren

Hier. Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat Baumweite mind. 3

Wegen Edwards und Farr: Induzierter Teilgraph



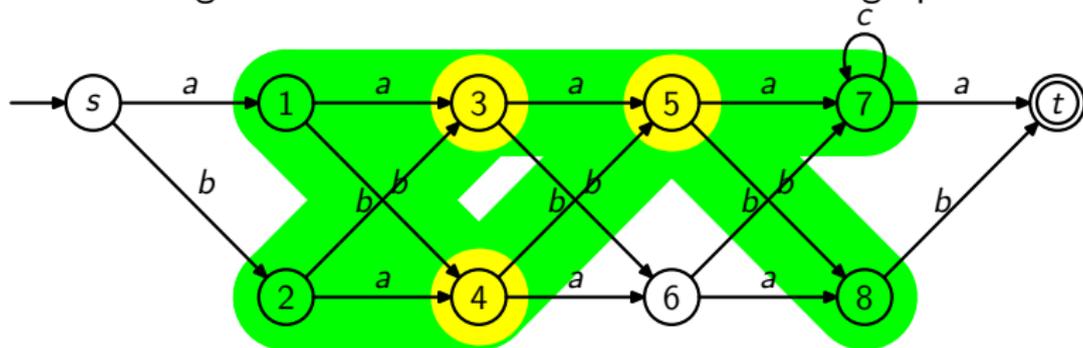
der Baumweite ≤ 2 mit mindestens $(3 \cdot 8)(4 + 1) = 4.8$
Knoten—Teilgraph in grün, Separator in gelb dargestellt.

Reihenfolge.

Fortlaufendes Beispiel—Separatoren

Hier. Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat Baumweite mind. 3

Wegen Edwards und Farr: Induzierter Teilgraph



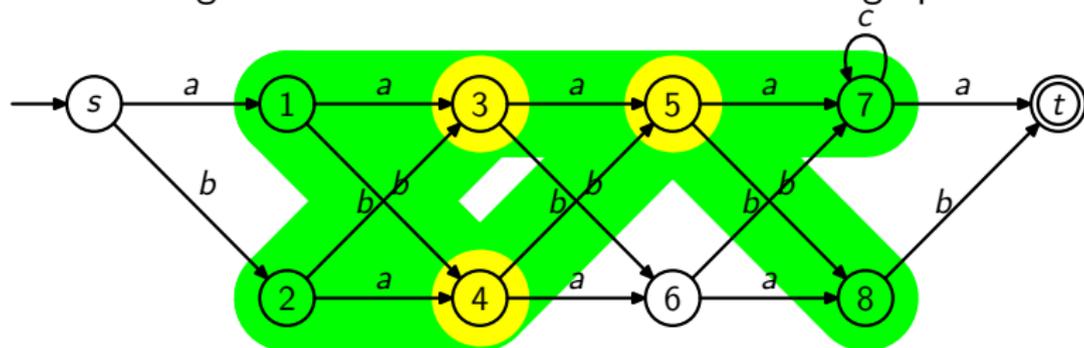
der Baumweite ≤ 2 mit mindestens $(3 \cdot 8)(4 + 1) = 4.8$
Knoten—Teilgraph in grün, Separator in gelb dargestellt.

Reihenfolge.

Fortlaufendes Beispiel—Separatoren

Hier. Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat Baumweite mind. 3

Wegen Edwards und Farr: Induzierter Teilgraph



der Baumweite ≤ 2 mit mindestens $(3 \cdot 8)(4 + 1) = 4.8$
Knoten—Teilgraph in grün, Separator in gelb dargestellt.

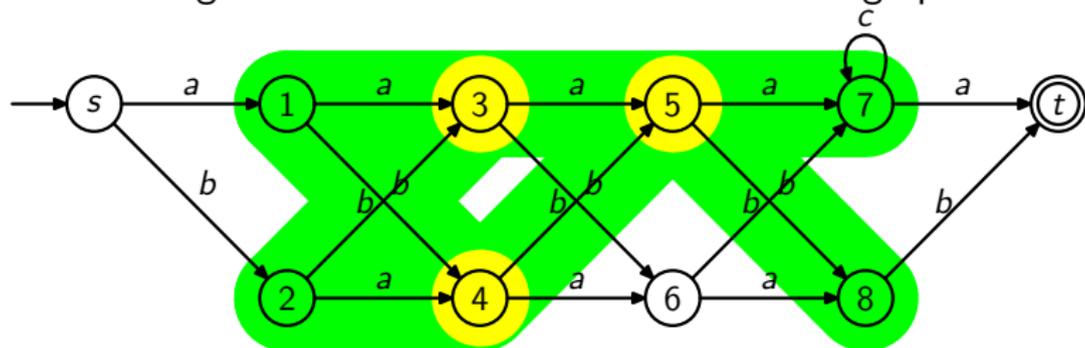
Reihenfolge.

— 3, 4, 5— 6

Fortlaufendes Beispiel—Separatoren

Hier. Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat Baumweite mind. 3

Wegen Edwards und Farr: Induzierter Teilgraph



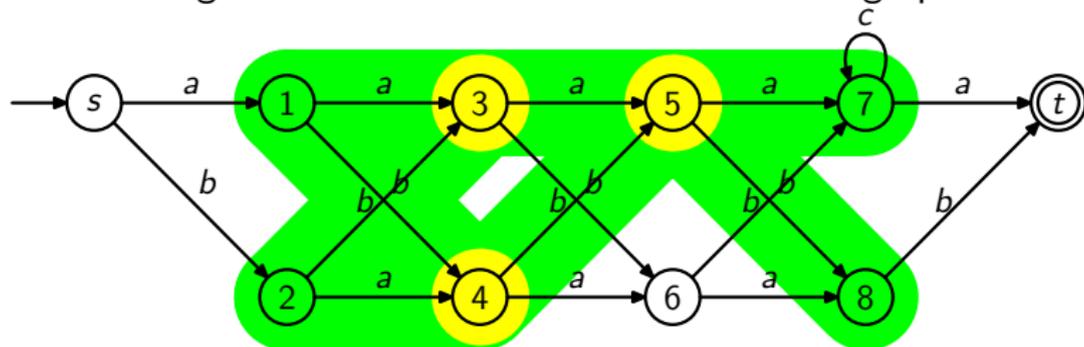
der Baumweite ≤ 2 mit mindestens $(3 \cdot 8)(4 + 1) = 4.8$
Knoten—Teilgraph in grün, Separator in gelb dargestellt.

Reihenfolge. 1, 2 — 7, 8— 3, 4, 5— 6

Fortlaufendes Beispiel—Separatoren

Hier. Graph $G \setminus \{s, t\}$ hat Baumweite mind. 3

Wegen Edwards und Farr: Induzierter Teilgraph



der Baumweite ≤ 2 mit mindestens $(3 \cdot 8)(4 + 1) = 4.8$
Knoten—Teilgraph in grün, Separator in gelb dargestellt.

Reihenfolge. 1, 2 — 7, 8— 3, 4, 5— 6

Ergebnis. $[(aa + ba)a + (ab + ba)b](ac^*a + bc^*a) + [(aa + ba)b + (ab + ba)a](ab + ba)$

Anwendung: Operationen auf Regulären Ausdrücken

Theorem

Seien $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ reguläre Sprachen mit alphabetischer Breite höchstens m bzw. n .

1. Dann gilt

$$\text{alph}(L_1 \cap L_2) \leq 2^{O(1 + \log \frac{m}{n}) \min\{m, n\}}.$$

Bestmögliche Schranke falls $m = \Theta(n)$.

2. Dann gilt

$$\text{alph}\left(\frac{1}{2}L_1\right) \leq |\Sigma| \cdot 2^{O(m)},$$

wobei $\frac{1}{2}L = \{x \in \Sigma^* \mid \exists y \text{ with } |x| = |y| \text{ s.t. } xy \in L\}$. □

Anmerkung. Beweis beruht auf Kreuzprodukt und rekursiver Suche nach Separatoren darin.

Diskussion

Was wir jetzt wissen.

- ▶ Umwandlung EA-nach-RA: Zustandselimination aufgepeppt
- ▶ Umwandlung binärer DEAs in RA der Länge $O(1.742^n)$. (Für größere Alphabete höhere Schranke)
Beachte: Untere Schranken $\Omega(1.001^n)$ (binär) und $\Omega(2^n)$ (allgemein).
- ▶ Sprachoperationen

Was wir gerade herausfinden oder schon aufschreiben.

- ▶ Experimenteller Vergleich der unterschiedlichen Strategien zur Zustandselimination
- ▶ Verallgemeinerung des Resultates für Automaten mit beschränkter Baumweite (**Bonus**: jetzt ~~Baumweite~~)
- ▶ Vergleichbare obere Schranke für Shuffle (wie Durchschnitt)

Ausblick

Was wir noch gern wissen wollen.

- ▶ Was ist die bestmögliche Schranke (z.B. für binäres Alphabet)?
- ▶ Ist die Bestimmung der besten Eliminationsreihenfolge **NP**-schwer?
- ▶ Bessere Beweistechniken? Vgl. Fooling set für NEAen. . . Alphabetische Breite vieler einfacher regulärer Sprachfamilien bleibt völlig offen [Ellul et al. 05]

Vielen Dank fürs Zuhören!



Kritik? Fragen? Anregungen?